幾何級数型分布ラグモデルに関する小標本理論

── 擬似最尤推定量の分布の漸近展開 ──

杉　原　左右一

1．幾何級数型分布ラグモデル

次式で表わされる幾何級数型分布ラグモデルを考える[1]。

$$y_t=\frac{\alpha}{1-\phi\mathcal{L}}x_t+u_t \tag{1}$$

ただし、$\mathcal{L}$をラグ演算子とするとき、$\frac{1}{1-\phi\mathcal{L}}$は、

$$\frac{1}{1-\phi\mathcal{L}}=\sum_{k=0}^{\infty}\phi^k\mathcal{L}^k \qquad (|\phi|<1) \tag{2}$$

で定義される無限次のラグ演算子を意味するものとする。また、以下では、u_tは互いに独立に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ にしたがうものとし、x_tについては、

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-\tau}x_t x_{t+\tau}=\gamma(\tau) \tag{3}$$

が存在するものとする。そうすれば、xのスペクトル分布関数 $F_x(\lambda)$ が存在して、

$$\gamma(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda\tau}dF_x(\lambda) \tag{4}$$

と表わせる。なお、ここではさらに、ある $l(\geqq 1)$ について

$$\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-\tau}x_t x_{t+\tau}=\gamma(\tau)+0(T^{-\frac{l}{2}}) \tag{5}$$

と仮定することにする。

1）幾何級数型分布ラグモデルの意味については良く知られているところであり、拙著〔4〕でも述べたことがあるのでここでは再述することはさけたい。

ところで、(1)式を変換して次の様に表現することもできる。

$$(1-\phi\mathcal{L})y_t=\alpha x_t+(1-\phi\mathcal{L})u_t \tag{6}$$

そうすれば、幾何級数型分布ラグモデルを一種の ARMAX モデル[2] とみなすことができる。ただし、 AR, MA 部分のラグ演算子が両者に共通に $(1-\phi\mathcal{L})$ であるという点に注意すれば、(6)式は特殊な ARMAX モデルに他ならない。

さて、上記幾何級数型分布ラグモデルの未知母数 $\theta=(\alpha, \phi, \sigma^2)'$ の統計的推定に関して、特に各種推定量の大標本特性については既に良く知られているところであろう[3]。これに反して、推定量の小標本特性については未だ必ずしも十分に知られているとは限らない[4]。そこで本稿では、未知母数 θ の(擬似)最尤推定量について、その分布の $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの漸近展開 (Edgeworth 展開) を試み、小標本時における推定量の理論的性質について考察することにしたい。

未知母数 θ の推定方法として、前述した様に(1)式をそのまま用いる方法と、これを変換した(6)式を用いる2つの方法が考えられるのであるが、本稿では以下(6)式を用いて議論を進めることにし、特に、y_t, u_t の初期値として $y_0=0$, $u_0=0$ と仮定することにする[5]。そうすれば、上記初期値の下で、$t=1, 2, \cdots, T$ についてモデルを

$$\phi(L)y=\alpha x+\phi(L)u \tag{7}$$

と表わすことができる。ただし、

---

2) Autoregressive Moving Average Model with Exogenous variable.

3) 例えば Dhrymes〔1〕にその包括的な展開がみられる。

4) θ の推定量の小標本特性に関して、特に α および ϕ の OLS 推定量の1次、2次の正確なモーメントについて考察したものに片岡〔2〕がある。またこれとは別に、ARMAX モデルに関する OLS 推定量の小標本特性について考察したものとして、Maekawa〔3〕, Tse〔6〕がある。

5) 特に $y_0=0$ なる仮定は、変数 x_t が存在する場合には必ずしも妥当なものとは限らないであろう。ただし、本稿ではひとまず上記初期値を用いることにして同仮定の下での推定量の小標本特性について考察することにする。上記以外の場合についてはさらに別稿で検討することにしたい。

$$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_T)',\quad x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_T)'$$
$$u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_T)',\quad \phi(L)=I_T-\phi L$$

であり、Lは次式で定義されるT次のラグ行列である。

$$L=\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ I_{T-1}, & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

この場合、対数尤度関数は

$$L=-\frac{T}{2}\log 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}u'u \tag{9}$$

と表わせる。ただし、上式でuは

$$u=y-\alpha\phi(L)^{-1}x \qquad \left(\phi(L)^{-1}=\sum_{k=0}^{T-1}\phi^k L^k\right) \tag{10}$$

を意味するものとする。

さて、θ の（擬似）最尤推定量 $\hat{\theta}$ は、(9)式をもとに、尤度方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$ の解として求められる。具体的に最大化の条件式を求めれば次の如くなる。

$$\begin{aligned} &\alpha=\frac{x'\phi(L)^{-1\prime}y}{x'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}x} \\ &x'\phi(L)^{-1\prime}L'\phi(L)^{-1\prime}(y-\alpha\phi(L)^{-1}x)=0 \\ &\sigma^2=\frac{1}{T}(y-\alpha\phi(L)^{-1}x)'(y-\alpha\phi(L)^{-1}x) \end{aligned} \tag{11}$$

上式からも明らかなように、尤度方程式を解くためには比較的複雑な非線型方程式を解かなければならない。そのために次の様な反復計算を行うことが考えられよう。すなわち、まず(7)式をもとに、適当な操作変数を用いて α と ϕ の一致推定量を求め、残差系列より σ^2 の一致推定量を求める。次に、これらの一致推定量を初期値として、Newton-Raphson 法ないし scoring 法（評点法）を用いて反復計算により尤度方程式を解くことが考えられる。

本稿では、以下（擬似）最尤推定量 $\hat{\theta}$ について、$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の $0_p\left(\dfrac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの確率展開と分布の $0\left(\dfrac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの Edgeworth 展開を求め、その理論的

特性について考察することにしたい。

2．最尤推定量の確率展開と分布の Edgeworth 展開

先に進む前に、ここで最尤推定量に関する確率展開と分布の Edgeworth 展開について、その一般的な性質を整理しておくことにしたい。

一般に、θ を（$n\times 1$）次元の未知母数ベクトルとし、対数尤度関数 $L(\theta)$ は θ について必要な回数まで連続微分可能であるものとしよう。θ の最尤推定量（MLE）を $\hat{\theta}$ と表わし、さらに以下の議論において必要となる諸量を次の如く定義する。ただし、本稿では以下テンソル演算で慣習的に用いられる簡略化された表現法を用いることにし、また、特にベクトルや行列の要素を表わす場合に、下つき添字を a, b, c, d=1, 2, …, n とし、上つき添字を j, k, l, m=1, 2, …, r 等と表わすことにする。

$$\tilde{\theta}^{\cdot}=\sqrt{T}\,(\hat{\theta}-\theta)$$

$$L(\theta)_{.}=\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}$$

$$L(\theta)_{..}=\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta\,\partial\theta'}$$

$$L(\theta)_{...}=:\frac{\partial^3 L(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c}\ \text{を第}(a, b, c)\text{要素とするテンソル}$$

$$L(\theta)_{....}=:\frac{\partial^4 L(\theta)}{\partial\theta_a\partial\theta_b\partial\theta_c\partial\theta_d}\ \text{を第}(a, b, c, d)\text{要素とするテンソル}$$

$$z_{.}=\frac{1}{\sqrt{T}}L(\theta)_{.}$$

$$Z_{..}=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(L(\theta)_{..}-E(L(\theta)_{..})\right) \tag{12}$$

$$Z_{...}=\frac{1}{\sqrt{T}}\left(L(\theta)_{...}-E(L(\theta)_{...})\right)$$

$$I_{..} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(L(\theta)_{..})$$

$$K_{...} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(L(\theta)_{...})$$

$$H_{....} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(L(\theta)_{....})$$

一般に、$z_{.}$, $Z_{..}$, $Z_{...}$ について、それらの異なる要素が全部で r 個あるものとして、これらの要素を（$r\times 1$）次元のベクトル $w^{\cdot}$ で表わし、$\tilde{\theta}^{\cdot}$ を $w^{\cdot}$ の関数とみなして、$\tilde{\theta}^{\cdot}=\tilde{\theta}(w^{\cdot})$ と表わす。このとき、$\tilde{\theta}(w^{\cdot})$ の $0_p\left(\frac{1}{T}\right)$ までの確率展開は次式で与えられる。

$$\tilde{\theta}(w^{\cdot}) = \theta^{\cdot}_{\cdot} \circ w^{\cdot} + \frac{1}{2\sqrt{T}} \theta^{\cdot}_{\cdot\cdot} \circ w^{\cdot} \circ w^{\cdot} + \frac{1}{6T} \theta^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot} \circ w^{\cdot} \circ w^{\cdot} \circ w^{\cdot} + o_p\left(\frac{1}{T}\right) \tag{13}$$

ただし、$\theta^{\cdot}_{\cdot}$, $\theta^{\cdot}_{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ はそれぞれ、

$$\theta^{\cdot}_{\cdot} = \left(\frac{\partial\tilde{\theta}_a}{\partial w^j}\bigg|_{w^{\cdot}=0}\right)$$

$$\theta^{\cdot}_{\cdot\cdot} =: \sqrt{T}\left(\frac{\partial^2\tilde{\theta}_a}{\partial w^j \partial w^k}\bigg|_{w^{\cdot}=0}\right) \text{ を第}(a, j, k)\text{要素とするテンソル}$$

$$\theta^{\cdot}_{\cdot\cdot\cdot} =: T\left(\frac{\partial^3\tilde{\theta}_a}{\partial w^j \partial w^k \partial w^l}\bigg|_{w^{\cdot}=0}\right) \text{ を第}(a, j, k, l)\text{要素とするテンソル} \tag{14}$$

である。

次に、(13)式の確率展開をもとにして、$\tilde{\theta}(w^{\cdot})$ の結合確率密度関数 $f(x)$ を $0\left(\frac{1}{T}\right)$ まで Edgeworth 展開すれば次式の如くなる。

$$f(x) = i(x) + \frac{1}{2\sqrt{T}} H(a)\alpha_4(a) + H(a, b)\left\{\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_5(a, b) + \frac{1}{2T}\alpha_7(a, b) + \frac{1}{8T}\alpha_4(a)\alpha_4(b) + \frac{1}{4T}\alpha_9(a, b)\right\} + H(a, b, c)\left\{\frac{1}{6}\alpha_1(a, b, c) + \frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_3(a, b, c)\right\}$$

$$+H(a,b,c,d)\left\{\frac{\alpha_2(a,b,c,d)}{24}+\frac{1}{2\sqrt{T}}\alpha_{10}(a,b,c,d)\right.$$

$$+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a,b)\alpha_4(c,d)+\frac{1}{6T}\alpha_6(a,b,c,d) \tag{15}$$

$$\left.+\frac{1}{4T}\alpha_3(a,b)\alpha_4(c,d)+\frac{1}{2T}\alpha_8(a,b,c,d)\right\}$$

$$+H(a,b,c,d,e,f)\left\{\frac{1}{72}\alpha_1(a,b,c)\alpha_1(d,e,f)\right.$$

$$+\frac{1}{12\sqrt{T}}\alpha_1(a,b,c)\alpha_3(d,e,f)$$

$$\left.+\frac{1}{8T}\alpha_3(a,b,c)\alpha_3(d,e,f)\right\}+o(T^{-1})$$

ただし、上式で $i(x)$ および $H(\bullet)$ は、

$$i(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\,|\,\Omega\,|^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}x'\Omega^{-1}x}$$

$$H(a)=\frac{\partial i(x)}{\partial x_a},\quad H(a,b)=\frac{\partial^2 i(x)}{\partial x_a\partial x_b}\text{ 等} \tag{16}$$

であり、係数 $\alpha_i(\bullet)$ は次式で定義される。

$$\alpha_1(a,b,c)=\psi^{ijk}\theta_a^i\theta_b^j\theta_c^k,\qquad \alpha_2(a,b,c,d)=\psi^{ijkl}\theta_a^i\theta_b^j\theta_c^k\theta_d^l$$

$$\alpha_3(a,b,c)=\gamma_a^i\theta_b^{ij}\gamma_c^j,\qquad \alpha_4(a)=\psi^{ij}\theta_a^{ij}$$

$$\alpha_5(a,b)=\psi^{ijk}\theta_a^{ij}\theta_b^k,\qquad \alpha_6(a,b,c,d)=\theta_a^{ijk}\gamma_b^i\gamma_c^j\gamma_d^k \tag{17}$$

$$\alpha_7(a,b)=\psi^{ij}\theta_a^{ijk}\gamma_b^k,\qquad \alpha_8(a,b,c,d)=\psi^{jk}\gamma_a^i\theta_b^{ij}\theta_c^{kl}\gamma_d^l$$

$$\alpha_9(a,b)\psi^{ij}\psi^{kl}\theta_a^{ij}\theta_b^l,\qquad \alpha_{10}(a,b,c,d)=\psi^{jkl}\gamma_a^i\theta_b^{ij}\theta_c^k\theta_d^l$$

$$(\gamma_a^i=\psi^{ij}\theta_a^j)$$

また、ψ は w' のキュムラントであり、Ω は

$$\Omega=[w(a,b)]\qquad w(a,b)=\psi^{ij}\theta_a^i\theta_b^j \tag{18}$$

である。

上式からも明らかになるように、一般に分布の $0\left(\frac{1}{T}\right)$ までの漸近展開においては、w' の4次までのキュムラント、および $\tilde{\theta}(w')$ の3階までの偏微分

係数が必要であり、$0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの展開では $w^{\cdot}$ の3次までのキュムラントおよび $\tilde{\theta}(w^{\cdot})$ の2階までの偏微分係数が必要である。

3．擬似最尤推定量に関する確率展開

本節では、(7)式のモデルについて、まず(擬似)最尤推定量 $\hat{\theta}$ に関する $\tilde{\theta}^{\cdot}=\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)$ の $0_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの確率展開を求めることにする。

そのために、$w^{\cdot}$ の要素 $(r=4)$ を求めれば次式の如くなる。

$$
\begin{aligned}
w^1 &= \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^1} = \frac{1}{\sqrt{T}} a_1'(y-\alpha\phi(L)^{-1}x)\\
w^2 &= \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sqrt{T}} a_2'(y-\alpha\phi(L)^{-1}x)\\
w^3 &= \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^3}\\
&= \frac{1}{\sqrt{T}}\left(y'A_{31}y-a_{32}'y+\frac{\alpha^2}{2\sigma^4}x'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}x\right)-\frac{\sqrt{T}}{2\sigma^2}\\
w^4 &= \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2\partial\theta^2}-E\left(\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\theta^2\partial\theta^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{T}} a_4'(y-\alpha\phi(L)^{-1}x)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ただし、上式で係数 $a_1, a_2, A_{31}, a_{32}, a_4$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sigma^2}\phi(L)^{-1}x\\
a_2 &= \frac{\alpha}{\sigma^2}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x\\
A_{31} &= \frac{1}{2\sigma^4}I_T\\
a_{32} &= \frac{\alpha}{\sigma^4}\phi(L)^{-1}x\\
a_4 &= \frac{2\alpha}{\sigma^2}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x
\end{aligned}
\tag{20}
$$

また、上記 $w^{\cdot}$ を用いて $z_{.}=\frac{1}{\sqrt{T}}L(\theta)_{.}$, $Z_{..}=\frac{1}{\sqrt{T}}(L(\theta)_{..}-E(L(\theta)_{..}))$ は

次式で与えられる。

$$z. = (w^1,\ w^2,\ w^3)' \tag{21}$$

$$Z.. = \begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{\alpha} w^2, & -\frac{1}{\sigma^2} w^1 \\ & w^4, & -\frac{1}{\sigma^2} w^2 \\ & & -\frac{2}{\sigma^2} w^3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

さらに、$I.. = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(L(\theta)..)$，$K... = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E(L(\theta)...)$ を求めれば次式を得る。

$$I.. = \begin{pmatrix} -\frac{h}{\sigma^2}, & -\frac{\alpha l}{\sigma^2}, & 0 \\ & -\frac{\alpha^2 m}{\sigma^2}, & 0 \\ & & -\frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$K_1.. = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{2l}{\sigma^2}, & \frac{h}{\sigma^4} \\ & -\frac{2\alpha(m+q)}{\sigma^2}, & \frac{\alpha l}{\sigma^4} \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$K_2.. = \begin{pmatrix} -\frac{2l}{\sigma^2}, & -\frac{2\alpha(m+q)}{\sigma^2}, & \frac{\alpha l}{\sigma^4} \\ & -\frac{6\alpha^2 p}{\sigma^2}, & \frac{\alpha^2 m}{\sigma^4} \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$K_3.. = \begin{pmatrix} \frac{h}{\sigma^4}, & \frac{\alpha l}{\sigma^4}, & 0 \\ & \frac{\alpha^2 m}{\sigma^4}, & 0 \\ & & \frac{2}{\sigma^6} \end{pmatrix} \tag{26}$$

ただし、上式で h, l, m, p, q はそれぞれ次式で与えられるものである。

$$h=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-\phi e^{i\lambda}|^2}dF_x(\lambda)$$

$$l=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\lambda}}{|1-\phi e^{i\lambda}|^2(1-\phi e^{-i\lambda})}dF_x(\lambda)$$

$$m=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'\phi(L)^{-1\prime}L'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1-\phi e^{i\lambda}|^4}dF_x(\lambda) \tag{27}$$

$$p=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'\phi(L)^{-1\prime}L'\phi(L)^{-1\prime}L'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda}}{|1-\phi e^{i\lambda}|^4(1-\phi e^{i\lambda})}dF_x(\lambda)$$

$$q=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}x'\phi(L)^{-1\prime}\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}L\phi(L)^{-1}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-2i\lambda}}{|1-\phi e^{i\lambda}|^2(1-\phi e^{-i\lambda})^2}dF_x(\lambda)$$

以上をもとに、次式で表わされる $\tilde{\theta}(w^{\cdot})$ の $0_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの確率展開を求めよう。

$$\tilde{\theta}(w^{\cdot})=\theta^{\cdot}\circ w^{\cdot}+\frac{1}{2\sqrt{T}}\theta^{\cdot\cdot}\circ w^{\cdot}\circ w^{\cdot}+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \tag{28}$$

途中の計算過程は極めて煩雑であるが、$\theta^{\cdot}$ および $\theta^{\cdot\cdot}$ の最終結果を明示することにすれば次の如くなる。

$$\theta^{\cdot}=\begin{pmatrix}\frac{m\sigma^2}{d}, & -\frac{l\sigma^2}{\alpha d}, & 0, & 0\\ & \frac{h\sigma^2}{\alpha^2 d}, & 0, & 0\\ & & 2\sigma^4, & 0\end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\theta_1^{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \theta_1^{11}, & \theta_1^{12}, & 0, & \theta_1^{14} \\ & \theta_1^{22}, & 0, & \theta_1^{24} \\ & & 0, & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\theta_2^{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \theta_2^{11}, & \theta_2^{12}, & 0, & \theta_2^{14} \\ & \theta_2^{22}, & 0, & \theta_2^{24} \\ & & 0, & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\theta_3^{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \theta_3^{11}, & \theta_3^{12}, & 0, & 0 \\ & \theta_3^{22}, & 0, & 0 \\ & & 0, & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

ただし、上式の各要素はそれぞれ次式で与えられるものとする。

$$\mathrm{d} = \mathrm{hm} - l^2$$

$$\theta_1^{11} = \frac{6l^2(l\mathrm{p} - \mathrm{mq})\sigma^4}{\alpha \mathrm{d}^3}$$

$$\theta_1^{12} = \frac{2l(-3\mathrm{h}l\mathrm{p} + 2\mathrm{hmq} + l^2\mathrm{q})\sigma^4}{\alpha^2 \mathrm{d}^3}$$

$$\theta_1^{14} = \frac{l^2\sigma^4}{\alpha \mathrm{d}^2}$$

$$\theta_1^{22} = \frac{2\mathrm{h}(3\mathrm{h}l\mathrm{p} - \mathrm{hmq} - 2l^2\mathrm{q})\sigma^4}{\alpha^3 \mathrm{d}^2}$$

$$\theta_1^{24} = -\frac{\mathrm{h}l\sigma^4}{\alpha^3 \mathrm{d}^2} \tag{33}$$

$$\theta_2^{11} = \frac{2l(-3hl\mathrm{p} + h\mathrm{m}^2 + 2\mathrm{hmq} - l^2\mathrm{m} + l^2\mathrm{q})\sigma^4}{\alpha^2 \mathrm{d}^3}$$

$$\theta_2^{12}=\frac{(6h^2lp-h^2m^2-2h^2mq-4hl^2q+l^4)\sigma^4}{\alpha^3d^3}$$

$$\theta_2^{14}=-\frac{hl\sigma^4}{\alpha^3d^2}$$

$$\theta_2^{22}=\frac{2h(-3h^2p+hlm+3hlq-l^3)\sigma^4}{\alpha^4d^3},\quad \theta_2^{24}=\frac{h^2\sigma^4}{\alpha^4d^2}$$

$$\theta_3^{11}=-\frac{2m\sigma^4}{d},\quad \theta_3^{12}=\frac{2l\sigma^4}{\alpha d},\quad \theta_3^{22}=-\frac{2h\sigma^4}{\alpha^2d}$$

4．擬似最尤推定量に関する分布の漸近展開

さて、前節の結果をもとにして、次に $\widetilde{\theta}(w^{\cdot})$ について、特にその周辺確率密度関数 $f_a(x)\,(a=1,2,3)$ の $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの Edgeworth 展開を求めることを考えよう。

そのために、まず $s=(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)'$ として、$w^{\cdot}$ のキュムラント母関数 $\psi(s)$ を求めればそれが次式で与えられることがわかる。ただし、ここでは以下の2次および3次のキュムラントの計算に不必要な部分は最初からこれを除外している。

$$\begin{aligned}\psi(s)=&-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{\sigma^2}I_T-2\frac{s_3}{\sqrt{T}}A_{31}\right|\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{\sqrt{T}}a_1+\frac{s_2}{\sqrt{T}}a_2-\frac{s_3}{\sqrt{T}}a_{32}+\frac{s_4}{\sqrt{T}}a_4+\frac{\alpha}{\sigma^2}\phi(L)^{-1}x\right)'\\&\left(\frac{1}{\sigma^2}I_T-2\frac{s_3}{\sqrt{T}}A_{31}\right)^{-1}\\&\left(\frac{s_1}{\sqrt{T}}a_1+\frac{s_2}{\sqrt{T}}a_2-\frac{s_3}{\sqrt{T}}a_{32}+\frac{s_4}{\sqrt{T}}a_4+\frac{\alpha}{\sigma^2}\phi(L)^{-1}x\right)\end{aligned}\tag{34}$$

上式より、原点 $s=0$ における2次および3次のキュムラントが次の如く与えられることがわかる。ただし、$p,q,r=1,2,4$ とする。

$$\begin{aligned}&\psi^{pq}=\frac{\sigma^2}{T}a_p'a_q,\quad \psi^{p3}=0,\quad \psi^{33}=\frac{1}{2\sigma^4},\quad \psi^{pqr}=0,\\&\psi^{pq3}=\frac{1}{T\sqrt{T}}a_p'a_q,\quad \psi^{p33}=0,\quad \psi^{333}=\frac{1}{\sqrt{T}\sigma^6}\end{aligned}\tag{35}$$

なおここで、Edgeworth 係数αの計算において、$\theta^{\cdot\cdot}_{\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot}$ の要素が0である部分に対応するキュムラントは実際には不要であること、および、$0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$までの展開を考える限り2次、3次のキュムラントはいづれもその最高次の値を評価すればよいことに注意したい。上記の注意の下に、必要なキュムラントを求めれば次の如くなる。

$$\psi^{11}=\frac{h}{\sigma^2}+0\left(\frac{1}{T}\right),\qquad \psi^{12}=\frac{\alpha l}{\sigma^2}+0\left(\frac{1}{T}\right)$$
$$\psi^{14}=\frac{2\alpha q}{\sigma^2}+0\left(\frac{1}{T}\right)$$
$$\psi^{22}=\frac{\alpha^2 m}{\sigma^2}+0\left(\frac{1}{T}\right),\qquad \psi^{24}=\frac{2\alpha^2 p}{\sigma^2}+0\left(\frac{1}{T}\right) \tag{36}$$
$$\psi^{333}=\frac{1}{\sqrt{T}\,\sigma^6}$$

したがって、分布の $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの Edgeworth 展開に必要となる係数 $\frac{1}{2}\alpha_4(a)$, $\frac{\sqrt{T}}{6}\alpha_1(a,a,a)+\frac{1}{2}\alpha_3(a,a,a)$ $(a=1,2,3)$ を求めれば次の如くなる。

$$\frac{1}{2}\alpha_4(1)=\frac{h(lp-mq)\sigma^2}{\alpha d^2}$$
$$\frac{\sqrt{T}}{6}\alpha_1(1,1,1)+\frac{1}{2}\alpha_3(1,1,1)=\frac{l^2(lp-mq)\sigma^4}{\alpha d^3}$$
$$\frac{1}{2}\alpha_4(2)=\frac{(-h^2p+hlm+hlq-l^3)\sigma^2}{\alpha^2 d^2} \tag{37}$$
$$\frac{\sqrt{T}}{6}\alpha_1(2,2,2)+\frac{1}{2}\alpha_3(2,2,2)=\frac{h(-h^2p+hlm+hlq-l^3)\sigma^4}{\alpha^4 d^3}$$
$$\frac{1}{2}\alpha_4(3)=-2\sigma^2$$
$$\frac{\sqrt{T}}{6}\alpha_1(3,3,3)+\frac{1}{2}\alpha_3(3,3,3)=\frac{4}{3}\sigma^6$$

以上をもとにして、最終的に $\tilde{\theta}^a$ $(a=1,2,3)$ の周辺確率密度関数の $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$

までの Edgeworth 展開を求めれば、それらが次式で与えられることがわかる。

$$f_1(\tilde{\theta}^1) \cong i(\tilde{\theta}^1)\left[1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\frac{(lp-mq)(hm-3l^2)}{\alpha m^2(hm-l^2)}\tilde{\theta}^1 + \frac{l^2(lp-mq)}{\alpha m^3\sigma^2}(\tilde{\theta}^1)^3\right\}\right] \tag{38}$$

$$f_2(\tilde{\theta}^2) \cong i(\tilde{\theta}^2)\left[1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\frac{2(h^2p-hlm-hlq+l^3)}{h(hm-l^2)}\tilde{\theta}^2 + \frac{\alpha^2(h^2p-hlm-hlq+l^3)}{h^2\sigma^2}(\tilde{\theta}^2)^3\right\}\right] \tag{39}$$

$$f_3(\tilde{\theta}^3) \cong i(\tilde{\theta}^3)\left[1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\tilde{\theta}^3 + \frac{1}{6\sigma^6}(\tilde{\theta}^3)^3\right\}\right] \tag{40}$$

ただし、$\phi(z)$ を1次元標準正規確率密度関数とするとき、$i(\tilde{\theta}^a)$ は、$\tilde{\theta}^a$ の $T\to\infty$ の場合の極限分布の確率密度関数を意味し、それぞれ次式で与えられるものである。

$$i(\tilde{\theta}^1) = \sqrt{\frac{hm-l^2}{m\sigma^2}}\,\phi\left(\sqrt{\frac{hm-l^2}{m\sigma^2}}\,\tilde{\theta}^1\right) \tag{41}$$

$$i(\tilde{\theta}^2) = \sqrt{\frac{\alpha^2(hm-l^2)}{h\sigma^2}}\,\phi\left(\sqrt{\frac{\alpha^2(hm-l^2)}{h\sigma^2}}\,\tilde{\theta}^2\right) \tag{42}$$

$$i(\tilde{\theta}^3) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^4}}\,\phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^4}}\tilde{\theta}^3\right) \tag{43}$$

5．分布の漸近展開の諸性質

さて、以上の結果から分布の漸近展開について少くとも次の諸点を明らかにすることができる。

まず、各成分 $\tilde{\theta}^a\,(a=1,2,3)$ について、$0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ のオーダーで、漸近展開による分布と極限分布の間に乗離がみられることが分かる。特に、$\tilde{\theta}^1$, $\tilde{\theta}^2$ については、それがすべての母数 $\theta=(\alpha,\phi,\sigma^2)'$ に依存していることが理解できよう。また、Edgeworth 係数が h, l, m, p, q を通して x_t の性質に依存し

ているから、一般に上記の展開式をこれ以上簡略化して表現することは困難であり、具体的にその展開式を評価したい場合には、x_t をさらに特定化した上で評価する以外にはない。この種の数値計算の実行については別の機会にゆずることにして、ここではこれとは別にx_tをパラメトリックな確率過程で表現して、Edgeworth 係数をモデルの定数パラメータのみを用いて表現することを考えよう。

例えば、その一例として、x_t が次式で表わされる MA(1) 過程にしたがう場合を考える。

$$x_t=\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1},\quad |\rho|<1,\quad \varepsilon_t\sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \tag{44}$$

そうすれば、上記した係数 h, l, m, p, q はそれぞれ次の如くなることがわかる。

$$\begin{aligned}
h&=\frac{1-2\rho\phi+\rho^2}{(1-\phi^2)}\sigma_\varepsilon^2 \qquad l=\frac{(1-\rho\phi)(\phi-\rho)}{(1-\phi^2)^2}\sigma_\varepsilon^2\\
m&=\frac{(1-\rho\phi)^2+(\phi-\rho)^2}{(1-\phi^2)^3}\sigma_\varepsilon^2\\
p&=\frac{\phi(1+\rho^2)(2+\phi^2)-\rho(1+5\phi^2)}{(1-\phi^2)^4}\sigma_\varepsilon^2\\
q&=\frac{\phi(1-\rho\phi)(\phi-\rho)}{(1-\phi^2)^3}\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{45}$$

したがって、この場合には、$\tilde{\theta}^1$, $\tilde{\theta}^2$ に関する漸近展開式が $(\alpha,\phi)'$ 以外にSN比 $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_\varepsilon^2}$ に依存することが理解できるのである。

次に、(38)～(40) 式を用いて推定量のバイアスを評価してみよう。そうすれば次式を得る。

$$E(\hat{\alpha}-\alpha)=\frac{1}{T}\frac{h(lp-mq)}{\alpha(hm-l^2)^2}\sigma^2 \tag{46}$$

$$E(\hat{\phi}-\phi)=\frac{1}{T}\frac{(-h^2p+hlm+hlq-l^3)}{\alpha^2(hm-l^2)^2}\sigma^2 \tag{47}$$

$$E(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)=-\frac{2}{T}\sigma^2 \tag{48}$$

上述したように h, l, m, p, q は x_t の性質に依存しているから、バイアスをこれ以上簡略化して表現することは困難であるが、$\hat{\alpha}$, $\hat{\phi}$ については、バイアスも母数 $\theta=(\alpha, \phi, \sigma^2)'$ に依存することが明らかになるのである。

ところで、上記した漸近展開式(38)～(40)の特徴は本モデルに固有のものといえるのであろうか。この問題を考察するために、同じく3母数 $\theta=(\alpha, \phi, \sigma^2)'$ から成るモデルではあるが、上記モデルとは別に、次式で表わされる攪乱項が AR(1) 過程にしたがう回帰モデルをとりあげて、両モデルの間で(擬似)最尤推定量の漸近展開の性質にどの様な相異があるかを検討することにしよう。両モデルとも“時系列―回帰モデル”として代表的なものであることは周知のところであろう。

$$y_t=\alpha x_t+\frac{u_t}{1-\phi\mathcal{L}} \tag{49}$$

さて、ここでも、攪乱項の初期値として $u_t=0$ $(t=0, -1, \cdots)$ を仮定することにすれば、上式を

$$y=\alpha x+\phi(L)^{-1}u \tag{50}$$

と表現することができる。

本稿と同様の計算の結果、この場合には（擬似）最尤推定量 $\hat{\theta}^a$ $(a=1, 2, 3)$ に関する周辺確率密度関数の $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの Edgeworth 展開が最終的に次式の如くなることを明らかにすることができる。

$$f_1(\widetilde{\theta}^1)\cong i(\widetilde{\theta}^1) \tag{51}$$

$$f_2(\widetilde{\theta}^2)\cong i(\widetilde{\theta}^2)\left[1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{\left(\frac{b}{a}+\frac{\phi}{1-\phi^2}\right)\theta^2-\frac{\phi}{(1-\phi^2)^2}(\widetilde{\theta}^2)^3\right\}\right] \tag{52}$$

$$f_3(\widetilde{\theta}^3)\cong i(\widetilde{\theta}^3)\left[1+\frac{1}{\sqrt{T}}\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\theta^3+\frac{1}{6\sigma^6}(\widetilde{\theta}^3)^3\right\}\right] \tag{53}$$

ただし、上式で、

$$a=\int_{-\pi}^{\pi}|1-\phi e^{i\lambda}|^2 dF_x(\lambda)$$

$$b=\int_{=\pi}^{\pi}e^{i\lambda}(1-\phi e^{-i\lambda})dF_x(\lambda) \tag{54}$$

であり、また

$$
\begin{aligned}
i(\tilde{\theta}^1) &= \sqrt{\frac{a}{\sigma^2}}\ \phi\left(\sqrt{\frac{a}{\sigma^2}}\,\tilde{\theta}^1\right)\\
i(\tilde{\theta}^2) &= \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\ \phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\,\tilde{\theta}^2\right)\\
i(\tilde{\theta}^3) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^4}}\ \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^4}}\,\tilde{\theta}^3\right)
\end{aligned}
\tag{55}
$$

である。

上式より、この場合には次の特徴を読みとることができる。すなわち $0\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$ までの漸近展開を考えれば $\tilde{\theta}^1$ については漸近展開による分布と極限分布が一致し、$\tilde{\theta}^2$ については、その Edgeworth 係数は α および σ^2 には依存しないことがわかるのである。さらに、Edgeworth 係数が a, b を通して x_t の性質に依存するとは言え、幾何級数型分布ラグモデルの場合と比較してその展開式は比較的簡単なものとなっていることがわかる。

このように、同じく 3 母数 ($\theta=(\alpha, \phi, \sigma^2)'$) から成るモデルでありながら、本稿で取り扱った幾何級数型分布ラグモデルの方が攪乱項が AR(1) 過程にしたがう回帰モデルに比べてその漸近展開式が著しく複雑となる原因は、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\phi}$ が $T\to\infty$ の極限においても相関をもつことに起因しているものといえよう。

ところで、この様な性質は、先に筆者が考察した AR−X−ARMA モデルにおいても同様に成立していることから[6]、本稿で明らかにした漸近展開の諸性質がより一般的な AR−X−ARMA モデルに関する漸近展開についても同様に成立することが予想されるのである。本稿で残された問題を含め、上記した一般化については機会をあらためて引き続き考察することにしたい。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

参考文献

〔1〕 Dhrymes, P. J. (1970), Distributed Lags : Problems of Formulation and

6) 拙著〔5〕

Estimation, Holden Day, San Francisco.
〔2〕 片岡佑作(1984),「Koyck type の分布ラグモデルにおける OLS 推定値の漸近特性」, 経済経営論叢, 19-2, 98-109.
〔3〕 Maekawa, K. (1984), "Edgeworth expansion for OLS estimator in an ARMAX model," Report No. 122, Statistical Research Group, Hiroshima Univ.
〔4〕 杉原左右一 (1982), 経済時系列の研究, 啓文社.
〔5〕 杉原左右一 (1983), 時系列の統計的研究, 東洋経済新報社.
〔6〕 Tse, Y. E. (1982), "Edgeworth approximation in first-order stochastic difference equations with exogenous variables," Journal of Econometrics, 20, 175-195.